Über zusammengesetzte relativ Galoissche Zahlkörper.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

Es seien $G_1(k)$ und $G_2(k)$ relativ Galoissche Zahlkörper über den algebraischen Zahlkörper k. Der zusammengesetzte Körper $G(k) = G_1 G_2(k)$ besitze die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$, die Körper $G_1(k)$ bzw. $G_2(k)$ sollen zu den Untergruppen $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ gehören. Die Untergruppen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ sind invariante und relativ prime Untergruppen.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal im Körper k, welches die rationale Primzahl p teilt. Die Grade bzw. Ordnungen der Primideale von $\mathfrak{p}$ im Körper $G_1(k)$ bzw. im Körper $G_2(k)$ seien f_1, g_1 bzw. f_2, g_2. Jedes Primideal $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ im Körper $G(k)$ hat denselben Grad F und dieselbe Ordnung G. Bekanntlich ist

$$G = \frac{g_1 g_2}{\Delta}, \tag{1}$$

wo Δ einen Teiler von (g_1, g_2) bildet.

Wir werden den folgenden Satz beweisen. *Es ist*

$$F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} \Delta', \tag{2}$$

wo Δ' einen Teiler von Δ, also auch von (g_1, g_2) bildet.

Wenn (g_1, g_2) relativ prim gegen p ist, so folgt der Satz aus einer wichtigen Abhandlung von ÖYSTEIN ORE[1]).

1. Die Zerlegungsgruppe bzw. Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}$ sollen durch $\mathfrak{H}$ bzw. $\bar{\mathfrak{H}}$ bezeichnet werden, ihre Ordnungen sind FG

[1]) ÖYSTEIN ORE, Über zusammengesetzte algebraische Körper, *Acta Math.*, 49 (1926), S. 379—396. Unser Satz ist noch in gewisser Richtung ausdehnbar.

bzw. G. Es seien die Ordnungen der Untergruppen

$$\mathfrak{A}=(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}), \quad \mathfrak{B}=(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{H})$$

h_1 bzw. h_2 und die Ordnungen der Untergruppen

$$\bar{\mathfrak{H}}_1=(\mathfrak{G}_1, \bar{\mathfrak{H}}), \quad \bar{\mathfrak{H}}_2=(\mathfrak{G}_2, \bar{\mathfrak{H}})$$

a_1 bzw. a_2. Es ist bekanntlich

$$G=g_1a_1=g_2a_2, \quad F=\frac{f_1h_1}{a_1}=\frac{f_2h_2}{a_2}. \tag{3}$$

Bilden wir die Komplexe $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}$. Die Untergruppe $\bar{\mathfrak{H}}$ ist eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$, folglich sind $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}$ Gruppen. Ihre Ordnungen sind nach FROBENIUS gleich

$$\frac{h_1G}{a_1}=h_1g_1 \text{ bzw. } \frac{h_2G}{a_2}=h_2g_2. \tag{4}$$

Die Gruppe $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}$ ist sogar eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$, weil $\mathfrak{A}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$ bildet, folglich ist der Komplex

$$\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}\,.\,\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}} \tag{5}$$

eine Gruppe. Bestimmen wir die Ordnung d des Durchschnitts von $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}$ und $\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}$. Vorerst enthält der Durchschnitt die Gruppe $\bar{\mathfrak{H}}$, es wird daher

$$d\equiv 0 \pmod{G}, \quad d=\frac{g_1g_2}{\Delta}u, \qquad u \text{ rational ganz.} \tag{6}$$

Andererseits enthält die Gruppe $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}\,.\,\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}$ die Untergruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ von der Ordnung h_1h_2. Daraus folgen

$$\frac{h_1g_1h_2g_2}{d}\equiv 0 \pmod{h_1h_2}, \quad \frac{g_1g_2}{d}=v, \qquad v \text{ rational ganz.} \tag{7}$$

Infolgedessen wird

$$\frac{g_1g_2\Delta}{g_1g_2u}=v, \qquad uv=\Delta,$$

also ergibt sich

$$d=\frac{g_1g_2}{\Delta}u, \qquad \Delta\equiv 0 \pmod{u}. \tag{8}$$

Die Gruppen $\dfrac{\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}}{\bar{\mathfrak{H}}}$, $\dfrac{\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}}{\bar{\mathfrak{H}}}$ sind demnach solche Untergruppen der zyklischen Gruppe $\dfrac{\mathfrak{H}}{\bar{\mathfrak{H}}}$, deren Durchschnitt von der Ordnung u

ist und so bekommt man

$$\left(\frac{h_1 g_1}{G}, \frac{h_2 g_2}{G}\right) = \left(\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2}\right) = u. \tag{9}$$

Nun sind

$$F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} T, \quad F = \frac{f_1 h_1}{a_1} = \frac{f_2 h_2}{a_2},$$

woraus

$$\frac{h_1}{a_1} = \frac{f_2}{(f_1, f_2)} T, \quad \frac{h_2}{a_2} = \frac{f_1}{(f_1, f_2)} T, \quad T = u$$

und der angekündigte Satz

$$F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} \Delta', \qquad \Delta' \text{ ein Teiler von } \Delta \tag{2}$$

folgen.

Aus (2) bekommt man nachstehende Relationen.

I. *Es ist*

$$f_1 f_2 g_1 g_2 \equiv 0 \pmod{FG};\text{[2]} \tag{10}$$

es gilt sogar noch

$$\frac{f_1 f_2 g_1 g_2}{(f_1, f_2)} \equiv 0 \pmod{FG}. \tag{10*}$$

II. *Wenn* $(g_1, g_2) = 1$ *ausfällt, so gelten die Relationen*

$$G = g_1 g_2, \quad F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}.$$

Dies folgt auch aus einer schönen Abhandlung von MIKAO MORIYA[3]), welche Ansätze von HERBRAND verfolgt und allgemeine Körper behandelt.

2. Die Resultate von MIKAO MORIYA liefern für relativ Galoissche Komponenten folgende Sätze.

III. *Werden noch die Bezeichnungen*

$$g_i = p^{m_i} g_i^{(0)}, \quad (p, g_i^{(0)}) = 1 \quad (i = 1, 2), \quad G = p^M G^{(0)}, \quad (p, G^{(0)}) = 1$$

eingeführt, so ist

$$M \leqq m_1 + m_2.$$

---

[2]) M. BAUER, Über zusammengesetzte Zahlkörper, *Math. Annalen,* **77** (1916), S. 357—361.

[3]) MIKAO MORIYA, Über einen Satz von Herbrand, *Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University,* **4** (1936), S. 182—194. Vgl. noch [4]) und Nr. 3 dieser Arbeit.

IV. *Ist* $M = m_1 + m_2$ (was sicher eintritt, wenn eine der Zahlen g_1, g_2 relativ prim gegen p ausfällt), *so wird*

$$G^{(0)} = \frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)}, g_2^{(0)})}.$$

V. *Ist* $G = g_1 g_2$ (was sicher eintritt, wenn $(g_1, g_2) = 1$ ausfällt), *so wird*

$$F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}.$$

Der Satz III folgt schon aus den Ergebnissen von H. WEBER (vgl. [2])).

Die Sätze IV und V überholen gewisse ältere Resultate[4]).

Nun habe ich neuerdings gefunden, daß die in der Arbeit [4]) verwendete Methode zum Beweise der Sätze IV und V ausreicht. Nur muß man die bekannten Eigenschaften der Verzweigungsgruppe (welche in [4]) gar nicht explizit auftritt) ausnützen. Andererseits ist die folgende Bemerkung von Bedeutung:

Wenn die Gruppe $\mathfrak{Q}$ von der Ordnung q die relativ primen Untergruppen $\mathfrak{Q}_1$ bzw. $\mathfrak{Q}_2$, deren Ordnungen q_1 bzw. q_2 sind, enthält und $q = q_1 q_2$ ausfällt, dann wird

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{Q}_1.$$

Wir werden z. B. den Beweis von V andeuten. Die Gruppe $\mathfrak{A}$ enthält $\bar{\mathfrak{H}}_1$, die Gruppe $\mathfrak{B}$ enthält $\bar{\mathfrak{H}}_2$, dieselben sind relativ prim. Aus $G = g_1 g_2$ folgen $G = a_1 a_2$ und $\bar{\mathfrak{H}} = \bar{\mathfrak{H}}_1 \bar{\mathfrak{H}}_2 = \bar{\mathfrak{H}}_2 \bar{\mathfrak{H}}_1$, wo $\bar{\mathfrak{H}}$ nicht notwendig eine zyklische Gruppe ist. Die Gruppen

$$\frac{\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}_2}{\bar{\mathfrak{H}}}, \frac{\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}_1}{\bar{\mathfrak{H}}}$$

sind relativ prime Untergruppen der zyklischen Gruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\bar{\mathfrak{H}}}$, es werden daher

$$\left(\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2}\right) = 1, \quad F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}, \quad \text{qu. e. d.} \tag{12}$$

Es ist zu bemerken, daß der Komplex $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}_2 . \mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}_1$ nicht notwendig eine Gruppe bildet.

3. Wir haben den Beweis des Satzes V angedeutet. Der Satz folgt übrigens auch aus (2). *Nun werden wir beweisen, daß Satz* IV

---

[4]) M. BAUER, Über relativ Galoissche Zahlkörper, *Math. Annalen*, **83** (1921), S. 70—73.

in jedem Falle richtig ist. Es gilt also immer (unabhängig von M)

$$G^{(0)} = \frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)}, g_2^{(0)})}.$$

Es war

$$\overline{\mathfrak{H}}_1 = (\mathfrak{G}_1, \overline{\mathfrak{H}}), \ \overline{\mathfrak{H}}_2 = (\mathfrak{G}_2, \overline{\mathfrak{H}}).$$

Die Komplexe

(13) $$\overline{\mathfrak{H}}_1 \mathfrak{V}, \ \overline{\mathfrak{H}}_2 \mathfrak{V},$$

wo $\mathfrak{V}$ die Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{P}$ bezeichnet, sind wieder Gruppen und zwar invariante Untergruppen von $\overline{\mathfrak{H}}$, ihre Ordnungen sind nach den Eigenschaften der Verzweigungsgruppe[5]) gleich

$$\frac{a_1 p^M}{p^{M-m_1}} = a_1 p^{m_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_2 p^M}{p^{M-m_2}} = a_2 p^{m_2}.$$

Der Komplex $\overline{\mathfrak{H}}_1 \mathfrak{V} \,.\, \overline{\mathfrak{H}}_2 \mathfrak{V}$ bildet auch eine Gruppe. Bestimmen wir die Ordnung des Durchschnitts

(14) $$(\overline{\mathfrak{H}}_1 \mathfrak{V}, \ \overline{\mathfrak{H}}_2 \mathfrak{V}).$$

Der Durchschnitt enthält $\mathfrak{V}$, es ist daher

(15) $$d = p^M u, \qquad u \text{ rational ganz.}$$

Andererseits enthält der Komplex die Gruppe $\overline{\mathfrak{H}}_1 \overline{\mathfrak{H}}_2$, woraus

(16) $$\frac{a_1 p^{m_1} a_2 p^{m_2}}{d} = a_1 a_2 v, \ \frac{p^{m_1+m_2}}{d} = v, \quad v \text{ rational ganz}$$

folgen. Aus (15) und (16) bekommt man

$$\frac{p^{m_1+m_2}}{p^M u} = v, \ \ uv = \frac{p^{m_1+m_2}}{p^M},$$

es ist also u eine Potenz von p, daraus folgt nach den bekannten Eigenschaften der Verzweigungsgruppe, daß

(17) $$u = 1, \ \ d = p^M$$

sind. Die Gruppen

$$\frac{\overline{\mathfrak{H}}_1 \mathfrak{V}}{\mathfrak{V}}, \ \frac{\overline{\mathfrak{H}}_2 \mathfrak{V}}{\mathfrak{V}}$$

sind relativ prime Untergruppen der zyklischen Gruppe $\frac{\overline{\mathfrak{H}}}{\mathfrak{V}}$. Es ist also

(18) $$\left(\frac{a_1 p^{m_1}}{p^M}, \frac{a_2 p^{m_2}}{p^M}\right) = 1.$$

---

[5]) Die Ordnung von $\frac{\overline{\mathfrak{H}}}{\mathfrak{V}}$ ist relativ prim gegen p, die Ordnung von $\mathfrak{V}$ ist eine Potenz von p.

Nun sind

$$G = g_i a_i, \quad p^M G^{(0)} = p^{m_i} g_i^{(0)} a_i, \qquad (i = 1, 2),$$

daraus folgen

$$a_i = p^{M-m_i} a_i' \quad (i = 1, 2); \quad (a_1', a_2') = 1$$

und man bekommt

(19) $$G^{(0)} = a_1' g_1^{(0)} = a_2' g_2^{(0)},$$

woraus die Relation

$$G^{(0)} = \frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)}, g_2^{(0)})}$$

folgt, QU. E. D.

Der Satz ist in gewisser Richtung noch ausdehnbar.

(Eingegangen am 17. September 1939.)